УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

О СВОЙСТВАХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА-ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов[1], Е.П. Кечко[2]

1 *svoitov@gsu.by*; Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
2 *ekechko@gmail.com*; Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

В работе изучаются экстремальные свойства и локализация нулей недиагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными комплексными числами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$. Приведенные теоремы дополняют и обобщают известные результаты К. Малера, Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя, П. Борвейна, Ф. Вилонского и К. Драйвер.

Ключевые слова: многочлены Эрмита – Паде, нули многочленов Эрмита – Паде, асимптотические равенства.

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^{k}$ целых положительных чисел.

Многочленами Эрмита – Паде 1-го рода системы экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ называют многочлены $A_{n_p}^{p}$, $deg\, A_{n_p}^{p} \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, \dots, k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$R_{n_0, n_1, \dots, n_k}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^{p}(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+\dots+n_k-1}\right), \ z \to 0. \qquad (1)$$

Многочлены $\{A_{n_p}^{p}(z)\}_{p=0}^{k}$ (при $n_0 = n_1 = \dots = n_k$ их принято называть диагональными многочленами Эрмита – Паде 1-го рода) введены в рассмотрение Эрмитом [1] в связи с исследованием арифметических свойств числа e.

Если не принимать во внимание одномерный случай, когда мы имеем дело с хорошо изученными классическими многочленами Паде (см. [2]), то можно сказать, что к настоящему времени свойства недиагональных многочленов исследованы в значительно меньшей степени (см. [3], [4]), чем диагональных. Отчасти это связано с тем, что методы, ранее применяемые при изучении диагональных многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде, в общей ситуации не столь эффективны. Например, методы Лапласа и перевала (метод седловой точки) достаточно детально разработаны для нахождения асимптотики интегралов, зависящих от одного параметра n. Однако, в общей ситуации приходится иметь дело с интегралами, зависящими от $k+1$ различных параметров $n_0, n_1, \dots, n_k$.

Полиномы $A_{n_0}^{0}(z), A_{n_1}^{1}(z), \dots, A_{n_k}^{k}(z)$, удовлетворяющие равенствам (1), могут быть получены решением линейной системы $n_0+n_1+\dots+n_k-1$ однородных уравнений с $n_0+n_1+\dots+n_k$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ – граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j,

$j = 0, 1, 2, \ldots, k$ принадлежат его внутренности. С использованием теоремы Коши о вычетах легко показать, что функции

$$A^p_{n_p}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int\limits_{C_p} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{\prod_{p=0}^{k} (\xi - \lambda_p)^{n_p}}, \ \ 0 \leqslant p \leqslant k, \tag{2}$$

$$R_{n_0, n_1, \ldots, n_k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\infty} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{\prod_{p=0}^{k} (\xi - \lambda_p)^{n_p}} \tag{3}$$

удовлетворяют (1) и всем другим условиям. Равенства (2) и (3) не являются новыми. Впервые они появились в работах Эрмита.

Далее будем рассматривать нормированную функцию, полученную делением остаточной функции $R_{n_0, n_1, \ldots, n_k}(z)$ на старший коэффициент многочлена $A^k_{n_k}(z)$. Чтобы найти его численное значение, продифференцируем $n_k - 1$ раз равенство (2) при $p = k$. В результате получим, что значение старшего коэффициента $A^k_{n_k}(z)$ совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i\, (n_k - 1)!} \int\limits_{C_k} \frac{d\xi}{(\xi - \lambda_k) \prod_{p=0}^{k-1} (\xi - \lambda_p)^{n_p}},$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно

$$\prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^{-n_p} / (n_k - 1)!.$$

Покажем, что нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\{A^p_{n_p}(z)\}_{p=0}^{k}$ являются решением следующей экстремальной задачи:

для фиксированного набора действительных чисел $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ найти многочлены $a^p_{n_p}(z)$, $deg\, a^p_{n_p} \leqslant n_p$, $p = 0, 1, \ldots, k$, со старшим коэффициентом многочлена $a^k_{n_k}(z)$ равным 1, реализующие минимум в следующем равенстве

$$E_{n_0, n_1, \ldots, n_k} = E_{n_0, \ldots, n_k}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \rho) := \min_{\{a^p_{np}(z)\}_{p=0}^{k}} \left\| \sum_{p=0}^{k} a^p_{n_p}(z)\, e^{\lambda_p z} \right\|_\rho,$$

где $\|h\|_\rho = \max\{|h(z)| : z \in D_\rho\}$, $D_\rho = \{z : |z| \leqslant \rho\} \subset \mathbb{C}$, а ρ – фиксированное положительное число меньшее $\pi / (\lambda_k - \lambda_0)$.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ – произвольная фиксированная последовательность действительных чисел, а $\rho < \pi / (\lambda_k - \lambda_0)$. Тогда, если $\min\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \to \infty$, то*

$$E_{n_0, n_1, \ldots, n_k} \sim \frac{n_k! \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^{n_p + 1}}{(n_0 + n_1 + \ldots + n_k + k)!}\, \rho^{n_0 + n_1 + \ldots + n_k + k}.$$

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ – произвольный фиксированный набор различных комплексных чисел. Тогда при $\min\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \to \infty$ локально равномерно по z*

$$R_{n_0, n_1, \ldots, n_k}(z) \sim \frac{z^{n_0 + n_1 + \ldots + n_k - 1}}{(n_0 + n_1 + \ldots + n_k - 1)!} e^{\frac{n_0 \lambda_0 + n_1 \lambda_1 + \ldots + n_k \lambda_k}{n_0 + n_1 + \ldots + n_k} z}.$$

В частных случаях теоремы совпадают с известными ранее результатами Л. Трефезена [5], П. Борвейна [6], Д. Браесса [7], Ф. Вилонского [8], А.В. Астафьевой и А.П. Старовойтова [9] в диагональном случае, а в недиагональном случае – с результатом К. Драйвер [4].

Далее, мы хотим локализовать область, в которой находятся нули многочленов $A^p_{n_p}(z)$, в зависимости от выбора чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ и $\{n_p\}_{p=0}^k$. В отдельных частных случаях такая задача хорошо известна. Так Г. Сеге [10] исследовал поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспонентой. Э. Сафф и Р. Варга [11] нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде экспоненциальной функции. В частности, им принадлежит хорошо известная "теорема о кольце".

В работе [8] Ф. Вилонский получил оценку сверху для модулей нулей диагональных многочленов Эрмита – Паде $\{A^p_n(z)\}_{p=0}^k$ системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$. В [12] аналогичный результат получен для произвольной системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$. Г. Шталь [13] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости. Эти исследования были продолжены им в [14].

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ *– произвольные различные комплексные числа. Тогда при* $n_p \geqslant 2$, $p = 0, 1, \dots, k$, $k \geqslant 1$ *нули многочлена* $A^p_{n_p}$, $0 \leqslant p \leqslant k$, *находятся в круге* $\{z : |z| < R^p_{n_p}\}$, *где*

$$R^p_{n_p} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{k} \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}.$$

Теорема 3 согласуется со всеми ранее известными результатами и содержит их в качестве частных случаев. Кроме того, построенные примеры показывают, что как верхнюю, так и нижнюю оценки для границы области локализации нулей в теореме 3 существенно улучшить нельзя.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Литература

1. Hermite C. *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – V. 21. – P. 289–308.

2. Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения.* – М.: Мир, 1986.

3. Mahler K. *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II* // J. Reine Angew. Math. – 1931. – V. 166. – P. 118–150.

4. Driver K. *Nondiagonal Hermite – Padé approximation to the exponential function* // J. of Comput. and Appl. Math. – 1995. – V. 65. – P. 125–134.

5. Trefethen L. N. *The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk* // J. Approx.Theory. – 1984. – V. 40. – № 4. – P. 380–384.

6. Borwein P. B. *Quadratic Hermite-Padé approximation to the exponential function* // Const. Approx. – 1986. – V. 62. – P. 291–302.

7. Braess D. *On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z, II* // J. Approx.Theory. – 1984. – V. 40. – № 4. – P. 375–379.

8. Wielonsky F. *Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z* // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 90. – № 2. – P. 283–298.

9. Астафьева А.В., Старовойтов А.П. *Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций* // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.

10. Szegö G. *Über eienige Eigenschaften der Exponentialreihe* // Sitzunggsberichte Berliner Math. Ges. – 1924. – № 23. – P. 50–64.

11. Saff E., Varga R. *On the zeros and poles of Pade approximations to e^z, II, in "Pade and Rational Approximations: Theory and Applications" (E. B. Saff and R. S. Varga, Eds.).* – New York.: Academic Press, 1977.

12. Старовойтов А.П., Кечко Е.П. *Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций* // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 3. – С. 409–420.

13. Stahl H. *Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.

14. Stahl H. *Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Constr. Approx. – 2006. – V. 23. – № 2. – P. 193–220.

ON PROPERTIES HERMITE – PADÉ POLYNOMIALS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

A.P. Starovoitov, E.P. Kechko

We study extremal properties and localization of zeros of nondiagonal type I Hermite – Padé polynomials for exponential system $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ with arbitrary different complex $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$. Proven theorems complement and generalize known results by K. Mahler, E. Saff and R. Varga, H. Stahl, P. Borwein, F. Wielonsky and K. Driver.

Keywords: Hermite – Padé polynomials, zeros of Hermite – Padé polynomials, asymptotic equality.